



TITLE:

経済安定化政策はカオスの景気循環を招く : Hopf分岐, 周期倍化分岐, そして, 数値シュミレーション [シミュレーション] (数理モデルと関数方程式)

AUTHOR(S):

吉田, 博之

CITATION:

吉田, 博之. 経済安定化政策はカオスの景気循環を招く : Hopf分岐, 周期倍化分岐, そして, 数値シュミレーション [シミュレーション] (数理モデルと関数方程式). 数理解析研究所講究録 2000, 1128: 46-53

ISSUE DATE:

2000-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63641>

RIGHT:

経済安定化政策はカオスの景気循環を招く：Hopf分岐，周期倍化分岐，そして，数値シミュレーション

名古屋学院大学 経済学部 吉田博之 (Hiroyuki Yoshida)

1 はじめに

経済学において，市場経済の調整過程や動態過程が安定的な性質を有するかどうかということを調べることは重要な問題である．このような問題は，理論的に重要であるだけではなく，現実の経済政策をいかに立案・運用していくかに密接に関連し，政策的な重要性を持っている．実際に，1960年代もしくは1970年代において，裁量的財政政策の有効性についてアカデミズムの中で多くの議論がなされた．具体的には，市場経済の調整過程の不完全性を理由に政府の積極的介入を主張するケインズ派と市場メカニズムに全幅の信頼を置き，政府の介入政策に反対するマネタリストとの論争であった．

現在，これらの論争は当時ほど盛んであるとはいえないが，1990年代後半の日本の長期的不況という現象を鑑みれば，なお，重要な論点であると思われる．本稿では，財政政策のタイミングが経済の安定性に与える影響について考察する．結論を先取りして述べれば，財政政策が適切なタイミングで行われなければ，その政策は無効であるばかりか，経済の不安定性を増幅させることが数値計算により確認される．裁量的財政政策には，政策ラグ，すなわち政策措置の実施に伴うタイムラグが存在し，経済安定政策の有効性はこの政策ラグの長さにおおいに依存するのである．例えば，政府が景気後退を認識し，政策変更を意図したとしよう．しかしながら，政策変更には議会による審議・議決が必要であり，概してこのような立法過程は長い時間を消耗する．そして，拡張的政策が実行される頃には景気は回復基調の状態にあって，その効果は，政府の意図に反し，経済の不安定化要因となるかもしれないのである．

2 モデル

次のように記号を定める．

l : 労働雇用量, n : 労働供給量 ($\frac{\dot{n}}{n} = \beta$), Q : 生産量, w : 貨幣賃金率, p : 価格水準, π^e : 予想インフレ率, $a = Q/l$: 労働生産性 ($\frac{\dot{a}}{a} = \alpha$), C_K : 資本家消費, C_L : 労働者消費, I : 投資, G : 政府支出, T : 税収, B : 債券, i : 利率, q : 債券の市場価格

ただし, Q, C_K, C_L, I, G, T , そして B はすべて実質タームで測られている．また, i, q は外生変数である．

労働分配率、雇用率はそれぞれ次のように定義される。

$$u = \frac{wl}{pQ} = \frac{w}{pa}, \quad (1)$$

$$v = \frac{l}{n} = \frac{Q}{na}. \quad (2)$$

〔労働者〕労働者は所得として、 $wl = upQ$ を受け取り、その一定割合 δ だけが税として差し引かれる。したがって、労働者の可処分所得は $(1 - \delta)upQ$ であり、労働者はそれをすべて消費 pC_L に回すとする。つまり、

$$pC_L = (1 - \delta)upQ. \quad (3)$$

〔資本家〕資本家の所得は、 $(1 - u)pQ + iB - q\dot{B}$ であり、第1項は財の生産活動に由来する所得、第2項は債券保有による利子所得、第3項は新債券の引受による支出を示す。ここでは、Wolfstetter (1982)と同様に、発行債券はすべて資本家が購入すると仮定している。簡単化のため、資本家も労働者と同じように所得の一定割合 δ が所得税として差し引かれるとする。資本家は可処分所得の一定割合 c を消費に回すとする。つまり、資本家の消費 C_K は

$$pC_K = c(1 - \delta)[(1 - u)pQ + iB - q\dot{B}], \quad 0 < c < 1 \quad (4)$$

である。また、資本家は投資を行う唯一の主体である。産出が需要によって決定されることを考慮するために、貯蓄行動から独立な投資関数を設定する。どのような投資関数を想定するかは、経済学者ごとに異なり、それぞれの経済学者の経済観が反映される。ここでは、Kaldor (1961)の経済成長に関する「定式化された事実」の第5番目の事実に着目しよう。そこでは、投資比率と資本分配率の間に正の相関関係が成立し、実証研究においてもその存在が確認されることが述べられている。これを踏まえて、投資関数を次のように定める。

$$I = H(1 - u)Q, \quad H' > 0, \quad H(0) = 0 \quad (5)$$

資本家は、単位コストに一定のマークアップ率 m を上乗せして望ましい価格 p^D を決定するとするとする。つまり、

$$p^D = m \frac{wl}{Q} = m \frac{w}{a} \quad (6)$$

しかしながら、望ましい価格は常に実現されることはなく、現実の価格変動は次のように定式化される。

$$\frac{\dot{p}}{p} = \gamma \frac{\dot{p}^D}{p^D}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (7)$$

ここで、 $0 < \gamma < 1$ という仮定は価格硬直性を意味する。(この点については、Sportelli (1995) 参照のこと)

[政府] 政府の税収の財源は，労働者と資本家の所得税の合計であるから

$$\begin{aligned} pT &= \delta[upQ + (1-u)pQ + iB - \dot{q}B] \\ &= \delta[pQ + iB - \dot{q}B] \end{aligned} \quad (8)$$

と表される．また，政府支出は次のように定式化される．

$$pG = \delta pQ + \mu(v^* - v)pQ \quad (9)$$

第1項は恒常的支出であり，政府が，経済の規模に比例して，支出することを示す．また，第2項は裁量的支出を示し，政府は，経済の均衡雇用率 v^* を基準に雇用政策を実施することを意味する． $\mu > 0$ のときには，不況時に財政支出を増やし，好況時に財政政策を減少させるような，反循環的な政策がとられる．また， $\mu < 0$ のときには，順循環的な政策をとることになる．Wolfstetter (1982) は，後者を古典派的政策，前者を Keynes 的政策と呼んでいる．さらに，Wolfstetter にならい，政府は財政赤字をすべて新債券発行によって賄うとする．したがって，政府の予算制約式は次のように表される．

$$q\dot{B} = iB + p(G - T) \quad (10)$$

[財市場] 財市場の不均衡は数量調整，すなわち，在庫調整によって満たされると想定する．つまり，財市場において，超過需要（超過供給）が発生する場合には，在庫ストックの放出（積み増し）によって需給一致が達成されるのである．

生産調整方程式は，以下のように特定化される．つまり，財市場の超過需要に応じて生産量が決定されるのである．

$$\dot{Q} = \epsilon(C_L + C_K + I + G - Q). \quad (11)$$

[労働市場] 労働市場の不均衡は次のように貨幣賃金率の変化に反映される．

$$\frac{\dot{w}}{w} = F(v) + \pi^e, \quad f(0) < 0, \quad \lim_{v \rightarrow 1} F(v) = \infty, \quad F' > 0. \quad (12)$$

さらに，インフレ予想形成は適応的期待によってなされとする．

$$\dot{\pi}^e = \theta \left(\frac{\dot{p}}{p} - \pi^e \right), \quad \theta > 0 \quad (13)$$

3 モデル分析

3.1 微分方程式体系

前節の式をまとめることにより，我々のモデルは， u, v, π^e に関する3変数の微分方程式から構成される．

$$\dot{u} = (1 - \gamma)[F(v) + \pi^e - \alpha]u, \quad (S-1)$$

$$\dot{v} = \{\epsilon[H(1-u) - (1-c)(1-\delta)(1-u) + \mu(1-c)(v^* - v)] - \alpha - \beta\}v, \quad (\text{S-2})$$

$$\dot{\pi}^e = \theta[\gamma(F(v) + \pi^e - \alpha) - \pi^e]. \quad (\text{S-3})$$

定常値 (u^*, v^*, π^{e*}) は $\dot{u} = \dot{v} = \dot{\pi}^e = 0$ として求められる。つまり,

$$F(v^*) = \alpha \quad (14)$$

関数 F の性質から $0 < v^* < 1$ が一意に存在することは明らか。そして, $0 < u^* < 1$ が一意に存在することを仮定する。さらに次の仮定をおく。

[仮定] $H'(1-u^*) > (1-c)(1-\delta)$

この仮定の経済学的意味は, 定常状態においては資本家の限界投資性向が資本家の限界貯蓄性向を上回るということである。このような状況は Kaldor (1940) においても想定されている。

また, 定常値として $(u^{**}, v^{**}, \pi^{e**}) = (0, 0, \gamma(F(0) - \alpha)/(1 - \gamma))$ が存在するが, 経済的に意味に乏しいので以下では考慮しない。

3.2 安定性分析と Hopf 分岐定理

経済の局所安定性について分析を行う。そのために, まず, 定常値の近傍で考慮した Jacobi 行列を求める。ただし, 以下では, 定常値を示す変数の右肩の添字 (*) は省略する。

$$\begin{bmatrix} 0 & u(1-\gamma)F' & u(1-\gamma) \\ -v\epsilon H' - (1-c)(1-\delta) & -v\epsilon(1-c)\mu & 0 \\ 0 & \theta\gamma F' & -\theta(1-\gamma) \end{bmatrix}$$

これより, λ を特性根として, 特性方程式は次のように示される。

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

ただし,

$$b_1 = v\epsilon(1-c)\mu + \theta(1-\gamma) := b_1(\mu); \quad (15)$$

$$\begin{aligned} b_2 &= v\epsilon(1-c)\theta(1-\gamma)\mu + v\epsilon[H' - (1-c)(1-\delta)]u(1-\gamma)F' \\ &:= b_2(\mu); \end{aligned} \quad (16)$$

$$b_3 = v\epsilon[H' - (1-c)(1-\delta)]\theta u(1-\gamma)F' > 0; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} b_1b_2 - b_3 &= v^2\epsilon^2(1-c)^2\theta(1-\gamma)\mu^2 \\ &+ \{v\epsilon(1-c)\theta^2(1-\gamma)^2 + v^2\epsilon^2(1-c)[H' - (1-c)(1-\delta)]u(1-\gamma)F'\}\mu \\ &- v\epsilon[H' - (1-c)(1-\delta)]u\gamma(1-\gamma)\theta F' := L(\mu). \end{aligned} \quad (18)$$

上述した Jacobi 行列を検討することにより、以下の2つの命題が得られる。

[命題1] 財政政策が十分 Keynes 的であれば ($\mu_A < \mu$)、政府は局所的に経済を安定化させることができる。

[命題2] $\mu = \mu_A$ は一意の Hopf 分岐値であり、その近傍において、 $\mu \rightarrow \mu_A$ のとき、 $[u(t; \mu), v(t, \mu), \pi^e(t; \mu)] \rightarrow [u^*, v^*, \pi^{e*}]$ となるような周期解 $[u(t; \mu), v(t, \mu), \pi^e(t; \mu)]$ が存在する。

ここでは、命題2の含意について考えてみよう。supercritical bifurcation が発生するとき、 $\mu < \mu_A$ において安定なリミットサイクルが存在する。このとき、十分強い財政政策を実施することが可能であれば、政府は経済を安定化させることができる。このような意味で Keynes 政策は有効であるといえる。

4 財政政策におけるタイムラグ

政策ラグが経済の安定性にどのような影響を及ぼすかを分析しよう。そこで、我々の議論のために、Takamasu(1995) にならって、政策ラグを τ として、政府の財政支出行動を次のように定式化する。

$$pG = \delta pQ + \mu(v^* - v_{t-\tau})pQ \quad (19)$$

したがって、分析される体系は次のようなものとなる。

$$\dot{u} = (1 - \gamma)[F(v) + \pi^e - \alpha]u, \quad (S-1)$$

$$\dot{v} = \{\epsilon[H(1 - u) - (1 - c)(1 - \delta)(1 - u) + \mu(1 - c)(v^* - v_{t-\tau})] - \alpha - \beta\}v, \quad (S-2')$$

$$\dot{\pi}^e = \theta[\gamma(F(v) + \pi^e - \alpha) - \pi^e]. \quad (S-3)$$

上の微分-差分方程式を定性的に分析することは不可能である。そこで、コンピューターによる数値計算による分析を実行する。ただし、関数形は次のように特定化する。

$$F(v) = 0.1 \left(\frac{1}{1 - v} - 4.8 \right), \quad (20)$$

$$H(1 - u) = 1.5(1 - u)^5 \quad (21)$$

また、数値 parameter を次のように特定化する。

$$\alpha = 0.02, \beta = 0.01, \gamma = 0.5, \theta = 0.8,$$

$$\epsilon = 0.1, c = 0.7, \delta = 2/7.$$

このとき、経済の定常値は次のように計算される。

$$u^* = 0.225852(22.6\%), v^* = 0.8(80\%), \pi^{e*} = 0(0\%)$$

そして、 $\tau = 3.1$ と特定化し、さらに、初期値を $u_0 = 0.63, v_s = 0.8(-3.1 \leq s \leq 0), \pi^e_0 = 0$ と固定している。

$\mu = 6.8, 7.2, 7.25, 7.3, 7.52$ に設定して数値 simulation を実行した。得られた結果が $u-v$ 平面への投影図として、それぞれ図 (1), (2), (3), (4) に示される (ただし、移行過程の循環は省略されている)。図 (1) は周期解, 図 (2) は 2 倍周期解, 図 (3) は 4 倍周期解, 図 (4) はカオス的アトラクターを示す。図 (1)-図 (3) は規則的循環を示すが、図 (4) では、経済変数が一方的に発散することも定常状態に収束することもなく、不規則な景気循環の挙動を表す。一連の図より、分岐 parameter の増大によって、周期倍分岐が繰り返され、最終的にカオスが発生していることが見てとれる。つまり、Feigenbaum が提案したカオスへの遷移ルートが出現しているのである。

以上の数値計算の結果により、政策ラグの存在が経済過程における不安定要因となることが読み取れるだろう。しかも政策当局が強い Keynes 的裁量政策を採用すればするほど、経済変動がより大きくなるのである。経済は定常状態に収束しないし、さらに財政政策 parameter の上昇が景気の振幅を増大させているという二重の意味で、経済の不安定化を招いている。したがって、Keynes 的な裁量政策を実行するためには、政策ラグをできるだけ短縮することがまず必要であり、さらに、なお残存する政策ラグが経済にどのような構造的影響を与えているのかを考慮することも政策担当者にとって重要な作業となるのである。

参考文献

1. Goodwin, R.M. (1967), A growth cycle, in C.H. Feinstein (ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge University Press: Cambridge
2. Goodwin, R.M. (1993), A Marx-Keyens-Schumpeter model of economic growth and fluctuation, in R. H. Day & P. Chen (eds.), *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*, Oxford University Press: Oxford
3. Kaldor, N. (1940), A model of the trade cycle, *The Economic Journal*, 50, 78-92
4. ——— (1961), Capital accumulation and economic growth, in F.A. Lutz & D.C. Hague (eds.), *The Theory of Capital*, St. Martin's Press: New York
5. Medio, A. (1980), A classical model of business cycle, in E.J. Nell (ed.), *Growth, Profits, and Property*, Cambridge University Press: Cambridge
6. Shibata, A. & N. Saito (1980), Time delays and chaos in two species, *Mathematical biosciences*, 51, 199-211
7. Sportelli, M. C. (1995), A Kolmogoroff generalized predator-prey model of Goodwin's growth cycle, *Journal of Economics*, 61, 35-64
8. Takamasu, A. (1995), On the effectiveness of fiscal policy in the Goodwin's growth cycle model, in N. Aoki, K. Shiraiwa & Y. Takahashi (eds.), *Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Chaos*
9. Wolfstetter, E. (1982), Fiscal policy and the classical growth cycle, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 42

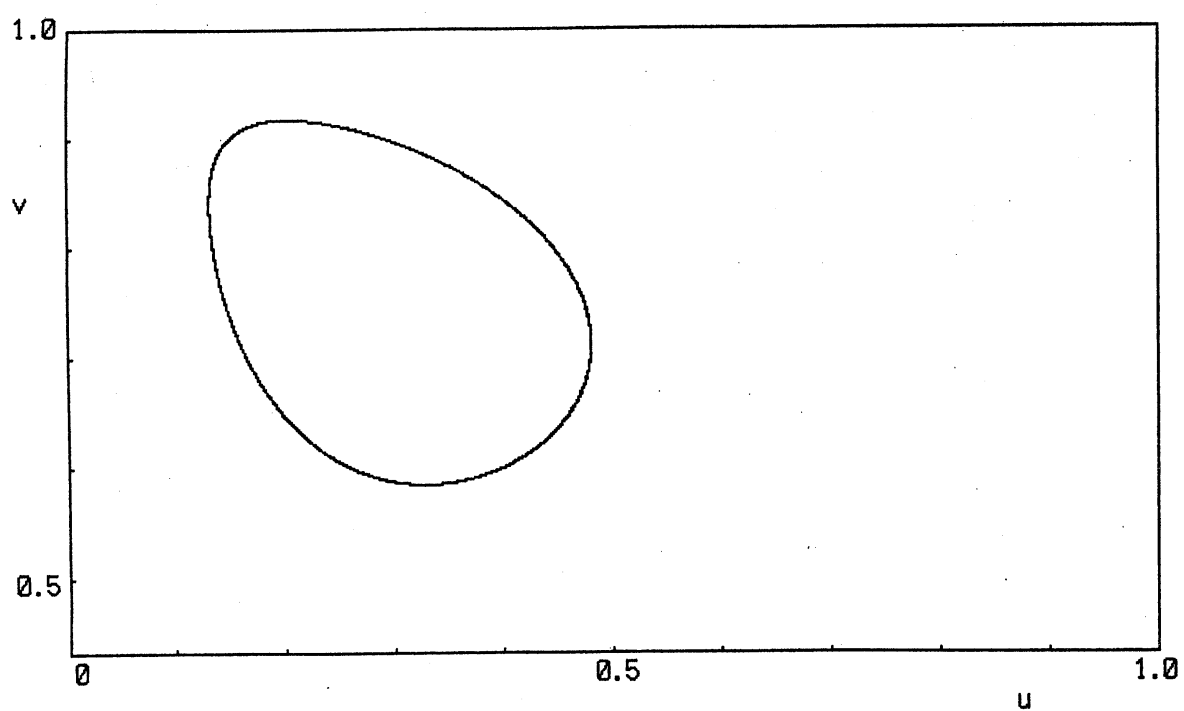


図 1: リミットサイクル

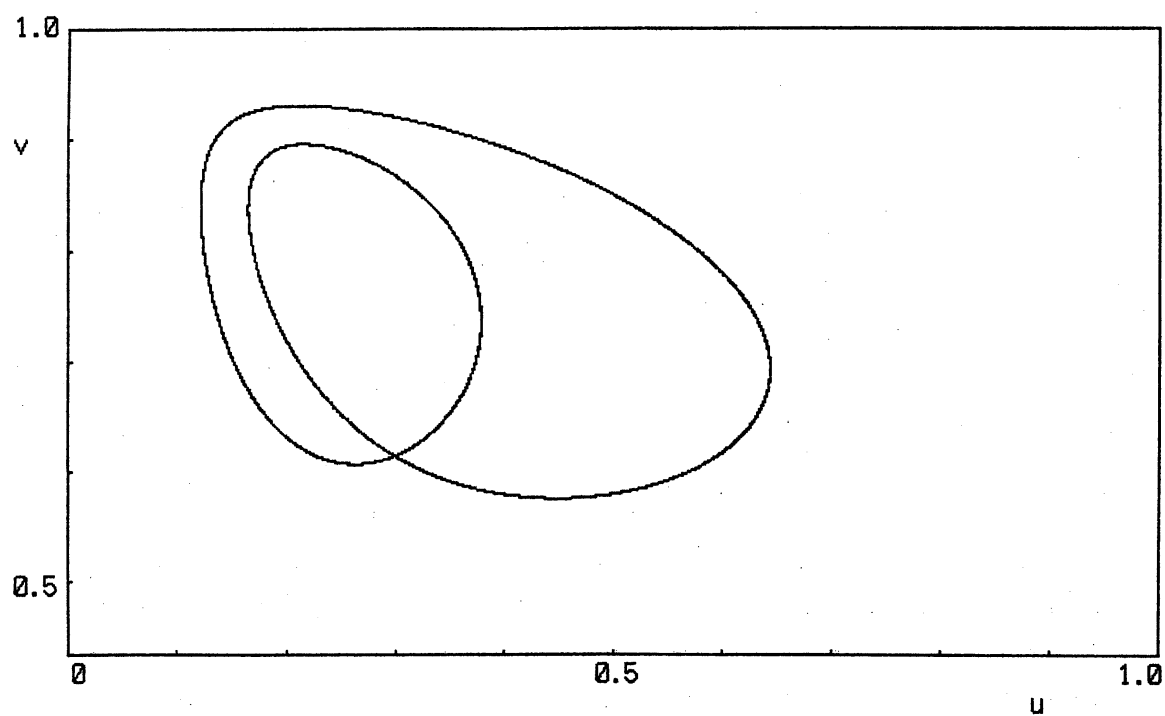


図 2: 2倍周期解

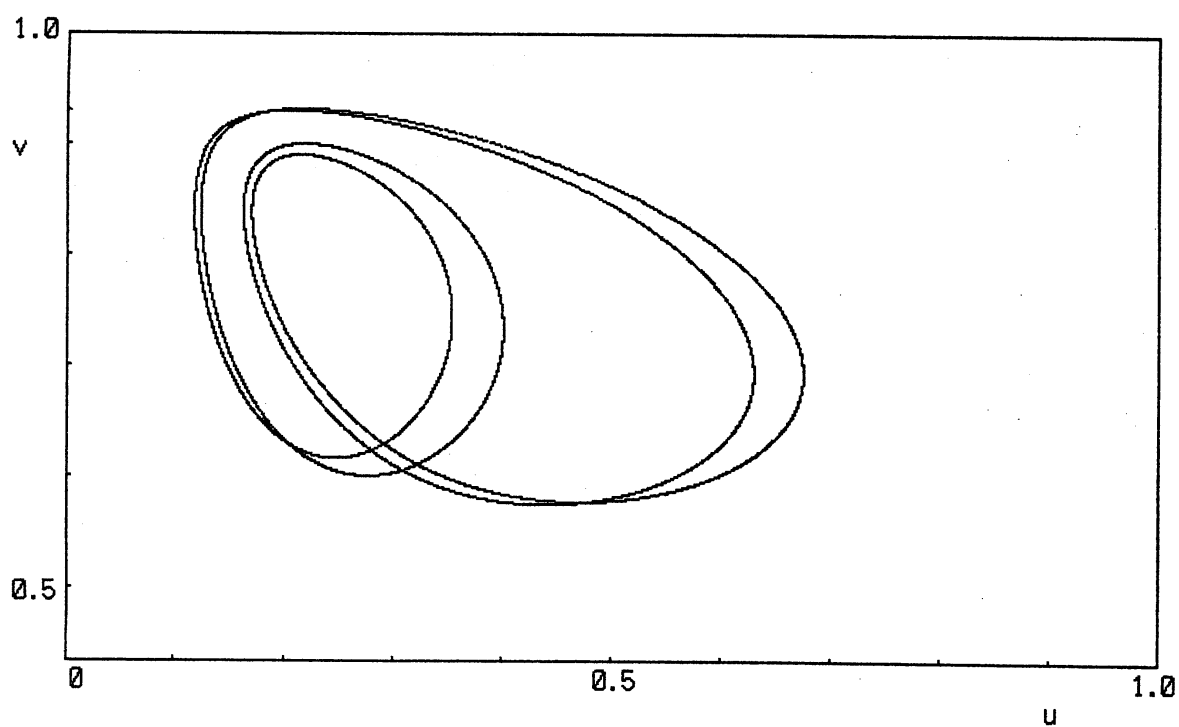


図 3: 4 倍周期解

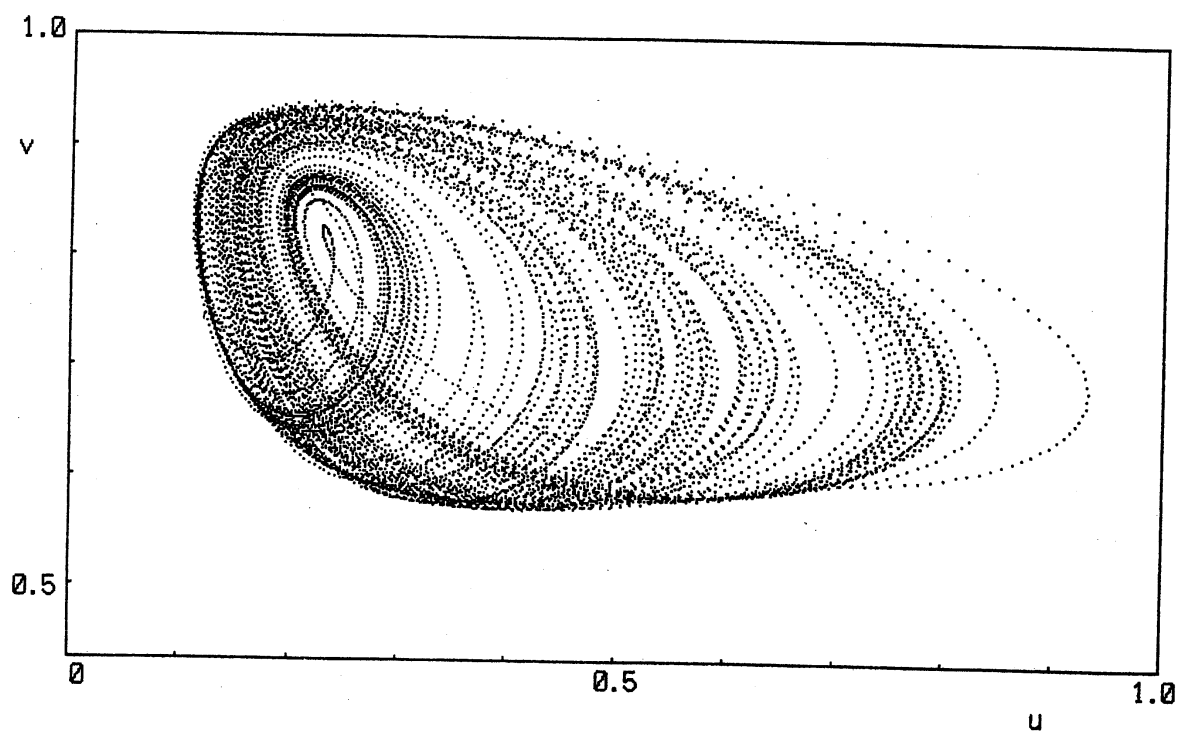


図 4: カオス